2020 年度機械システム系学科第３年次編入学(一般)試験問題

【問１】

（１）以下の関数を微分せよ.

$f(x) = [\log(1-2x)]^2 \qquad (x < \frac{1}{2})$

（２）$f(x) = e^{x^2}$，$f[\varphi(x)] = 1 - x$ であるとき，$\varphi(x)$を求めよ.

ただし，$\varphi(x) \geq 0$，$x \leq 0$とする.

【問２】

すべての実数の集合をR で，次数 n の単位行列を I_n で表す．$A \in R^{n\times n}$, $t \in R$ に対して，以下の関数（無限級数）を定める．

$$f(At) = I_n + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \cdots$$

（１） $\frac{d}{dt}f(At) = Af(At)$ となることを示せ．ただし，上記の級数は項別に微分可能である．

（２） 上の結果から，$x(t) \in R^n$ に関する微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$$

の解が

$$x(t) = f(At)x_0$$

と表されることを示せ．

（３） $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ とする．A を対角化せよ．

（４） 上記の A について，$f(At)$ を求めよ．ただし，$z \in R$ の指数関数 e^z のマクローリン展開が

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$$

であることに注意せよ．

（５）連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1(t) = 2x_2(t), \quad x_1(0) = 2 \\ \dfrac{d}{dt}x_2(t) = -x_1(t) + 3x_2(t), \quad x_2(0) = -1 \end{cases}$$

の解を求めよ．