

2022年度機械システム系学科第3年次編入学(一般)試験問題

【問1】

曲線 $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$) を, y 軸まわりに回転してできる形の容器いっぱい
に水が満たされている. 時刻 $t=0$ において容器の底(原点)から排水を始める.
容器に残っている水の高さを h , 体積を V とするとき, V の時間変化率 dV/dt は,
 $dV/dt = -\sqrt{h}$ で与えられるものとする. なお, y 軸は鉛直上向きとし, 排水口の大きさは考えないものとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 水の高さ h の時間変化率 dh/dt を, h を用いて表せ.
- (2) 容器の水が完全に排出されるまでにかかる時間を求めよ.

【問2】

行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ と $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を用いて表される 2 次曲面 ${}^tPAP = 0$

について考える. 以下の問いに答えよ. ただし, 左上添字 t は転置を表すものとする. なお, 計算過程も示せ.

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.
- (3) 直交行列 U によって行列 A を対角化する. U とそれに対応する対角行列 D をそれぞれ 1 つ求めよ.
- (4) (3) の結果により, 2 次曲面の標準形を求めよ.